Universidad Autónoma de Chiapas

Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas

Ecuación de Langevane y su aplicación en la predicción de terremotos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

PAVEL SANTIAGO HERNANDEZ HERNANDEZ

Director:

Dr. Yofre Hernán García Gómez

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas a - de - del 2024.

Tabla de contenidos

Resumen

Esta tesis presenta

1 Introducción

1.1. Introducción del modelo de Langevin y su aplicación a terremotos

El modelo de Langevin fue propuesto por Paul Langevin en 1908 para describir el movimiento browniano de partículas suspendidas en un fluido. Este modelo captura la dinámica de una partícula bajo la influencia de una fuerza determinista (como la fricción) y una fuerza aleatoria (ruido blanco gaussiano), y se expresa mediante una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$dv(t) = -\gamma v(t)\, dt + \sqrt{2D}\, dW(t) \tag{1.1}$$

donde de Ecuación 1.1:

- $v(t)$: velocidad de la partícula,
- γ: coeficiente de fricción,
- D: coeficiente de difusión (intensidad del ruido térmico),
- $W(t)$: movimiento browniano estándar.

Con el tiempo, este modelo fue generalizado para describir sistemas que combinan comportamientos deterministas con fluctuaciones aleatorias, incluyendo fenómenos físicos, biológicos, químicos y financieros.

En el contexto geofísico, el modelo de Langevin se ha extendido para modelar la dinámica de fallas sísmicas. Para representar eventos sísmicos abruptos —como rupturas en la corteza terrestre— se incorpora un término adicional de saltos, modelados mediante un proceso de Poisson o, más generalmente, un proceso de Lévy. El modelo extendido es:

$$dv(t) = [-\gamma v(t) + F_{\text{ext}}(t)]\, dt + \sqrt{2D}\, dW(t) + dJ(t),$$

donde:

- $(F_{\text{ext}}(t))$: fuerza externa acumulada, por ejemplo, por tectónica de placas,
- $(J(t))$: proceso de saltos, que representa eventos súbitos (rupturas sísmicas),
- El resto de símbolos mantienen su significado anterior.

Una formulación típica para los saltos es:

$$J(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

donde:

- $(N(t))$ es un proceso de Poisson de tasa $(\lambda > 0)$,
- (Y_i) representa la magnitud del i-ésimo salto (aleatoria, por ejemplo, con distribución exponencial o normal truncada).

Este modelo se denomina Ecuación de Langevin con saltos y pertenece a la clase de ecuaciones diferenciales estocásticas impulsadas por procesos de Lévy.

Su aplicación en geofísica permite modelar:

- El movimiento gradual de una falla mediante la fricción y ruido térmico,
- La ocurrencia de microtemblores,
- La irrupción de terremotos mayores como saltos discontinuos.

Este enfoque ofrece una base matemática para la simulación y el análisis estadístico de secuencias sísmicas, incluyendo la estimación de probabilidades de ocurrencia, clasificación de eventos y simulación de trayectorias dinámicas realistas.

2 Preliminares

2.1. Análisis Real y Funcional (Base Analítica).

Definición 2.1. Espacio métrico
Llamamos espacio métrico al par (X, d), donde X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \to [0, \infty)$ es una función (llamada métrica) que satisface, para todo $x, y, z \in X$:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definición 2.2. Sucesión de Cauchy.
Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d) es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Definición 2.3. Espacio métrico completo
Un espacio métrico (X, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy en X converge a un límite en X.

El espacio $\mathbb{R}$ con la métrica $d(x, y) = |x - y|$ es completo.

Definición 2.4. σ-álgebra de Borel.
La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$, denotada $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, es la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$.

Definición 2.5. Función Borel Medible
Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Borel-medible si para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se tiene que $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Teorema 2.1. *Toda función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Borel-medible.*

Demostración. Si f es continua, la preimagen de cualquier conjunto abierto es abierta. Como los abiertos generan $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y la preimagen conmuta con uniones, intersecciones numerables y complementos, se sigue que $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

2.2. Espacios L^2 y convergencia.

Definición 2.6. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. EL espacio $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se define como

$$L^2 = \left\{ X : \Omega \to \mathbb{R} \mid X \text{ es } \mathcal{F}\text{-medible y } \mathbb{E}[|X|^2] < \infty \right\}.$$

Definición 2.7. Para $X \in L^2$, su norma se define como

$$\|X\|_{L^2} = \left(\mathbb{E}[|X|^2]\right)^{1/2}.$$

Definición 2.8. Una sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2$ converge en L^2 a $X \in L^2$ si

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{L^2} = 0,$$

es decir, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^2] = 0$.

2.3. Espacios de Banach

Definición 2.9. Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ que es completo con respecto a la métrica inducida por la norma, es decir, toda sucesión de Cauchy en X converge en X.

El espacio $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de Banach (de hecho, un espacio de Hilbert).

Definición 2.10. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \implies \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

En $\mathbb{R}$, esto se reduce a: (x_n) es de Cauchy si $|x_m - x_n| < \varepsilon$ para m, n suficientemente grandes.

2.4. Desigualdades

Proposición 2.1. *Para cualesquiera* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$*,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

En particular, para $n = 3$*,*

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Proposición 2.2. *Sean* $f, g : [0, T] \to \mathbb{R}$ *funciones medibles tales que* $f, g \in L^2([0, T])$*. Entonces*

$$\left|\int_0^T f(s)g(s)\, ds\right| \leq \left(\int_0^T |f(s)|^2\, ds\right)^{1/2} \left(\int_0^T |g(s)|^2\, ds\right)^{1/2}.$$

Corolario 2.1. *Si* $g \equiv 1$*, entonces para todo* $t \in [0, T]$*,*

$$\left(\int_0^t f(s)\, ds\right)^2 \leq t \int_0^t |f(s)|^2\, ds.$$

3 Objetivos

3.1. Los objetivos de este proyecto se estarán afinando dentro de las proximas semanas.

4 Existencia y unicidad fuerte

Teorema 4.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado que satisface las hipótesis usuales. Consideremos la ecuación diferencial estocástica modificada (sin saltos grandes):*

$$\begin{aligned} dZ(t) = b(Z(t-))\,dt \\ &+ \sigma(Z(t-))\,dB(t) \\ &+ \int_{|x|<c} F(Z(t-),x)\,\widetilde{N}(dt,dx), \qquad t \geq 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

con condición inicial $Z(0) = Z_0$, donde $B(t)$ es un movimiento browniano estándar unidimensional ($r = 1$); $N(dt, dx)$ es una medida aleatoria de Poisson definida en $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ con medida de intensidad $\nu(dx)$; $\widetilde{N}(dt, dx) = N(dt, dx) - \nu(dx)\,dt$ denota la correspondiente medida compensada; $c \in (0, \infty]$ es un umbral fijo que separa los saltos pequeños de los grandes; y Z_0 es una variable aleatoria $\mathcal{F}_0$-medible, independiente del ruido estocástico.

Supongamos que los coeficientes $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones medibles que satisfacen las siguientes condiciones:

4.0.0.1. (C1) Condición de Lipschitz:

Existe una constante $K_1 > 0$ tal que, para todo $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |b(y_1) - b(y_2)|^2 + |\sigma(y_1) - \sigma(y_2)|^2 \\ &+ \int_{|x|<c} |F(y_1,x) - F(y_2,x)|^2\,\nu(dx) \\ &\leq K_1|y_1 - y_2|^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.0.0.2. (C2) Condición de crecimiento lineal:

Existe una constante $K_2 > 0$ tal que, para todo $y \in \mathbb{R}$,

$$|b(y)|^2 + |\sigma(y)|^2 + \int_{|x|<c} |F(y,x)|^2 \, \nu(dx) \leq K_2(1 + |y|^2). \tag{4.3}$$

Bajo las hipótesis anteriores, existe una única solución fuerte $Z = (Z(t))_{t \geq 0}$ de la ecuación (Ecuación 4.1) tal que:

- *Z es un proceso adaptado y cádlág (continuo por la derecha con límites por la izquierda),*
- *La solución es única casi seguramente, esto es, si (Z') es otra solución, entonces*

$$\mathbb{P}(Z(t) = Z'(t) \text{ para todo } t \geq 0) = 1. \tag{4.4}$$

Demostración. Queremos ver la existencia de una solución $Z = (Z(t))_{t \geq 0}$ para la ecuación (Ecuación 4.1) con condición inicial $Z(0) = Z_0$. Bajo las hipótesis (Ecuación 4.2) y (Ecuación 4.3) para los coeficientes b, σ y F. Analizaremos primero el caso cuando $\mathbb{E}[|Z_0|^2] < \infty$. Dado que la ecuación estocástica de nuestro caso posee un movimiento browniano B, es decir, ruido estocástico y una medida de Poisson compensada, dada por $\widetilde{N}$, para esto utilizaremos la iteración de Picard construyendo una sucesión de procesos estocásticos a partir de la condición inicial. Definiendo la suceción de la siguiente forma:

$$Z_0(t) := Z_0, \ \forall t \geq 0.$$

Para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} Z_{n+1}(t) := Z_0 &+ \int_0^t b(Z_n(s-))ds + \int_0^t \sigma(Z(s-))dB(s) \\ &+ \int_0^t \int_{|x|<c} F(Z_n(s-), x)\widetilde{N}(ds, dx). \end{aligned}$$

Demostraremos que el proceso Z_n es un proceso adaptado y con trayectorias Cádlág. Consideremos la diferencia $Z_1(t) - Z_0(t)$. Por la iteración de Picard tenemos:

$$\begin{aligned} Z_1(t) = Z_0(t) &+ \int_0^t b(Z_0(s-))ds + \int_0^t \sigma(Z_0(s-)) \\ &+ \int_0^t \int_{|x|<c} F(Z_0(s-), x)\widetilde{N}(ds, dx). \end{aligned}$$

Dado que $Z_0(t) = Z_0$ para todo $t \geq 0$, entonces,

$$
\begin{aligned}
Z_1(t) - Z_0 = \int_0^t b(Z_0)ds + \int_0^t \sigma(Z_0)dB(s) \\
+ \int_0^t \int_{|x|<c} F(Z_0, x)\widetilde{N}(ds, dx).
\end{aligned}
$$

Considerando la desigualdad

$$
(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2). \tag{4.5}
$$

Tomando valor absoulto y elevando al cuadrado la expreción anterior tenemos que

$$
\begin{aligned}
|Z_1(t) - Z_0|^2 &= \left| \int_0^t b(Z_0)\, ds + \int_0^t \sigma(Z_0)\, dB(s) \right. \\
&\qquad \left. + \int_0^t \int_{|x|<c} F(Z_0, x)\, \widetilde{N}(ds, dx) \right|^2 \\
&\le 3\Bigg(\left(\int_0^t b(Z_0)\, ds \right)^2 + \left(\int_0^t \sigma(Z_0)\, dB(s) \right)^2 \\
&\qquad + \left(\int_0^t \int_{|x|<c} F(Z_0, x)\, \widetilde{N}(ds, dx) \right)^2 \Bigg).
\end{aligned}
$$

Para controlar de manera uniforme en todo el intervalo $[0, t]$ tomamos el supremo sobre todo el intervalo, además usando propiedades del supremos podemos obtener

$$
\begin{aligned}
\sup_{0\le s\le t} |Z_1(s) - Z_0|^2 &\le \sup_{0\le s\le t} \Bigg(3\Bigg(\left(\int_0^s b(Z_0)\, ds \right)^2 + \left(\int_0^s \sigma(Z_0)\, dB(s) \right)^2 \\
&\qquad + \left(\int_0^s \int_{|x|<c} F(Z_0, x)\, \widetilde{N}(ds, dx) \right)^2 \Bigg)\Bigg) \\
&= 3\Bigg(\sup_{0\le s\le t} \left(\int_0^s b(Z_0)\, ds \right)^2 + \sup_{0\le s\le t} \left(\int_0^s \sigma(Z_0)\, dB(s) \right)^2 \\
&\qquad + \sup_{0\le s\le t} \left(\int_0^s \int_{|x|<c} F(Z_0, x)\, \widetilde{N}(ds, dx) \right)^2 \Bigg).
\end{aligned}
$$

Tomando valor esperado de ambos lado y usando la linealidad, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|Z_1(s)-Z_0|^2\right] &\le \mathbb{E}\Bigg[3\Bigg(\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s b(Z_0)\,ds\right)^2 \\
&\qquad + \sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s \sigma(Z_0)\,dB(s)\right)^2 \\
&\qquad + \sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s\int_{|x|<c} F(Z_0,x)\,\widetilde{N}(ds,dx)\right)^2\Bigg)\Bigg] \\
&= 3\Bigg(\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s b(Z_0)\,ds\right)^2\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s \sigma(Z_0)\,dB(s)\right)^2\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s\int_{|x|<c} F(Z_0,x)\,\widetilde{N}(ds,dx)\right)^2\right]\Bigg).
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Trabajaremos término por termino; así notemos que la siguiente integral es de Lebesgue

$$
\int_0^s b(z_0)du = b(z_0)\int_0^s du = b(z_0)\cdot s
$$

Por lo tanto

$$
\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s b(Z_0)du\right)^2 = \sup_{0\le s\le t}(b(Z_0)\cdot s)^2 = \sup_{0\le s\le t} b(Z_0)^2\cdot s^2 = b(Z_0)^2\cdot t^2.
$$

Consideremos ahora el proceso

$$
M(s) := \int_0^s \sigma(Z_0)dB(u). \tag{4.7}
$$

Afirmamos que dicho proceso es una martingala, pues al ser Z_0 constante esto implica que $\sigma(Z_0)$ no dependa de u. Dado que Z_0 es $\mathcal{F}_0$-medible, entonces $\sigma(Z_0)$ también lo es, más aún, es $\mathcal{F}_u$-medible para toda $u\ge 0$. Por lo tanto el termino a integrar del proceso $M(s)$, el cuál es una integral de Itô, es adaptado. Por hipotésis, de la condición (C2), podemos afirmar que

$$
\mathbb{E}[|\sigma(Z_0)|^2] \le K_2(1+\mathbb{E}[|Z_0|^2]) \le \infty.
$$

Esto pues obteniendo el valor esperado de (Ecuación 4.3) , tomando a $y = Z_0$ tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\sigma(Z_0)|^2] &\leq \mathbb{E}\left[|b(Z_0)|^2 + |\sigma(Z_0)|^2 + \int_{|x|<c} |F(Z_0,x)|^2\nu(dx)\right] \\ &\leq \mathbb{E}[K_2(1+|Z_0|^2)] \\ &= K_2\mathbb{E}[1+|Z_0|^2] \\ &= K_2(1+\mathbb{E}[|Z_0|^2]).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Por lo tanto, el proceso $M(s)$ es una martingala. Así, usando la desigualdad maximal de Doob, tenemos que:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |M(s)|^2\right] \leq 4\mathbb{E}[|M(t)|^2].$$

De la isometría de Itô y por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |M(s)|^2\right] &\leq 4\mathbb{E}[|M(t)|^2] \\ &= 4\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(Z_0)|^2 ds\right] \\ &= 4\int_0^t \mathbb{E}[|\sigma(Z_0)|^2] ds \\ &= 4\mathbb{E}[|\sigma(Z_0)|^2]\int_0^t ds \\ &= 4t\mathbb{E}[|\sigma(Z_0)|^2].\end{aligned}$$

De manera análoga, para el termino

$$W(s) := \int_0^s \int_{|x|<c} F(Z_0,x)\widetilde{N}(du,dx).$$

Podemos afirmar que es una martingala. Usando la isometría de Itô, desigualdad maximal de Doob y por el teorema de Fubini

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}|W(s)|^2\right] &\leq 4\mathbb{E}[|W(t)|^2] \\
&= 4\int_0^t\int_{|x|<c}\mathbb{E}[|F(Z_0,x)|^2]\nu(dx)ds \\
&= 4t\int_{|x|<c}\mathbb{E}[|F(Z_0,x)|^2]\nu(dx).
\end{aligned}
$$

Así, de la igualdad (Ecuación 4.6) tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}|Z_1(s)-Z_0|^2\right] \leq 3\Bigg(&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left(\int_0^s b(Z_0)\,ds\right)^2\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left(\int_0^s \sigma(Z_0)\,dB(s)\right)^2\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left(\int_0^s\int_{|x|<c} F(Z_0,x)\,\widetilde{N}(ds,dx)\right)^2\right]\Bigg) \\
\leq 3\Bigg(&t^2\mathbb{E}[|b(Z_0)|^2]+4t\mathbb{E}[|\sigma(Z_0)|^2] \\
&+4t\int_{|x|<c}\mathbb{E}[|F(Z_0,x)|^2]\nu(dx)\Bigg) \\
= 3t^2&\mathbb{E}[|b(Z_0)|^2]+12t\mathbb{E}[|\sigma(Z_0)|^2] \\
&+12t\int_{|x|<c}\mathbb{E}[|F(Z_0,x)|^2]\nu(dx).
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Notemos para los terminos en común $3t^2$ y $12t$ podemos definir la variable $C_1(t) := \text{máx}\{3t, 12\}$, de aquí

$$
\begin{aligned}
3t^2 &= 3t\cdot t \leq \text{máx}\{3t,12\}\cdot t = C_1(t)\cdot t. \\
12t &= 12\cdot t \leq \text{máx}\{3t,12\}\cdot t = C_1(t)\cdot t.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, (Ecuación 4.9) queda de la forma

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|Z_1(s)-Z_0|^2\right] &\le 3t^2\mathbb{E}[|b(Z_0)|^2] + 12t\mathbb{E}[|\sigma(Z_0)|^2] \\
&\qquad + 12t\int_{|x|<c}\mathbb{E}[|F(Z_0,x)|^2]\nu(dx) \\
&\le C_1(t)\cdot t\Bigg(\mathbb{E}[|b(Z_0)|^2] + \mathbb{E}[|\sigma(Z_0)|^2] \\
&\qquad + \int_{|x|<c}\mathbb{E}[|F(Z_0,x)|^2]\nu(dx)\Bigg).
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Por hipotésis, los coeficientes b, σ y F cumplen con la condición (Ecuación 4.3), vale decir

$$
|b(Z_0)|^2 + |\sigma(Z_0)|^2 + \int_{|x|<c}|F(Z_0,x)|\nu(dx) \le K_2(1+|Z_0|^2).
$$

De (Ecuación 4.8) podemos afirmar que $\mathbb{E}[K_2(1+|Z_0|^2)] = K_2(1+\mathbb{E}[|Z_0|^2])$, tomando valor esperado de la ecuación anterior, tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|b(Z_0)|^2 + |\sigma(Z_0)|^2 + \int_{|x|<c}|F(Z_0,x)|\nu(dx)\right] &\le \mathbb{E}[K_2(1+|Z_0|^2)]. \\
\mathbb{E}[|b(Z_0)|^2] + \mathbb{E}[|Z_0|^2] + \mathbb{E}\left[\int_{|x|<c}|F(Z_0,x)|^2\nu(dx)\right] &\le K_2(1+\mathbb{E}[|Z_0|^2]). \\
\mathbb{E}[|b(Z_0)|^2] + \mathbb{E}[|Z_0|^2] + \int_{|x|<c}\mathbb{E}[|F(Z_0,x)|^2]\nu(dx) &\le K_2(1+\mathbb{E}[|Z_0|^2]).
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Así de (Ecuación 4.10) y (Ecuación 4.11) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|Z_1(s)-Z_0|^2\right] &\le C_1(t)\Bigg(\mathbb{E}[|b(Z_0)|^2] + \mathbb{E}[|\sigma(Z_0)|^2] \\
&\qquad + \int_{|x|<c}\mathbb{E}[|F(Z_0,x)|^2]\nu(dx)\Bigg) \\
&\le C_1(t)\cdot t\cdot K_2(1+\mathbb{E}[|Z_0|^2]).
\end{aligned}
$$

Peamos la diferencia para Z_{n+1} y Z_n, por la iteración de Picard, tenemos que

$$
\begin{aligned}
Z_n = Z_0 &+ \int_0^t b(Z_{n-1}(s-))ds + \int_0^t \sigma(Z_{n-1}(s-))dB(s) \\
&+ \int_0^t \int_{|x|<c} F(Z_{n-1}(s-), x)\widetilde{N}(ds, dx) \\
Z_{n+1} = Z_0 &+ \int_0^t b(Z_n(s-))ds + \int_0^t \sigma(Z_n(s-))dB(s) \\
&+ \int_0^t \int_{|x|<c} F(Z_n(s-), x)\widetilde{N}(ds, dx).
\end{aligned}
$$

Consideremos la siguiente notación

$$
\begin{aligned}
\Delta b(n,s) &= b(Z_n(s-)) - b(Z_{n-1}(s-)). \\
\Delta \sigma(n,s) &= \sigma(Z_n(s-)) - \sigma(Z_{n-1}(s-)). \\
\Delta F(n,s,x) &= F(Z_n(s-), x) - F(Z_{n-1}(s-), x).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la diferencia $Z_{n+1} - Z_n$ está dada por

$$
\begin{aligned}
Z_{n+1}(t) - Z_n(t) = &\int_0^t \Delta b(n,s)ds + \int_0^t \Delta\sigma(n,s)dB(s) \\
&+ \int_0^t \int_{|x|<c} \Delta F(n,s,x)\widetilde{N}(ds, dx).
\end{aligned}
$$

Elevando al cuadrado, considerando valor absoluto y usando la desigualdad (Ecuación 4.5), tenemos que

$$
\begin{aligned}
|Z_{n+1}(t) - Z_n(t)|^2 &= \Bigg(\int_0^t \Delta b(n,s)ds + \int_0^t \Delta\sigma(n,s)dB(s) \\
&\qquad + \int_0^t \int_{|x|<c} \Delta F(n,s,x)\widetilde{N}(ds, dx) \Bigg)^2 \\
&\leq 3\Bigg(\left(\int_0^t \Delta b(n,s)ds \right)^2 + \left(\int_0^t \Delta\sigma(n,s)ds \right)^2 \\
&\qquad + \left(\int_0^t \int_{|x|<c} \Delta F(n,s,c)\widetilde{N}(ds, dx) \right)^2 \Bigg).
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Nuevamente, definimos la siguiente notación

$$
\begin{aligned}
A &:= \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s \Delta b(n,u)du\right)^2\right] \\
B &:= \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s \Delta \sigma(n,u)dB(u)\right)^2\right] \\
C &:= \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s \Delta F(n,u,x)\widetilde{N}(du,dx)\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

Por tanto de la (Ecuación 4.12), tomando supremo en el intervalo $[0,t]$ y aplicando valor esperado, la expresión se reduce a la forma

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|Z_{n+1}(s)-Z_n(s)|^2\right] \le 3(A+B+C). \tag{4.13}
$$

Trabajaremos con cada termino de la desigualdad para poder acotar $\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|Z_{n+1}(t)-Z_n(t)|^2\right]$. Notemos que para A el termino del supremo es una integral de Lebesgue, por lo que usando la Desigualdad de Cauchy-Schwarz podemos afirmar que

$$
\left(\int_0^s \Delta b(n,u)du\right)^2 \le s\int_0^s |\Delta b(n,u)|^2 du, \quad \forall s\in[0,t].
$$

Dado que $s\le t$, esto implica que

$$
s\int_0^s |\Delta b(n,u)|^2 du \le t\int_0^t |\Delta b(n,u)|^2 du.
$$

Dado que el supremo preserva desigualdades, tenemos

$$
\begin{aligned}
\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s \Delta b(n,u)du\right)^2 &\le \sup_{0\le s\le t}\left(s\int_0^s |\Delta b(n,u)|^2 du\right) \\
&\le \sup_{0\le s\le t}\left(t\int_0^t |\Delta b(n,u)|^2 du\right) \\
&= t\int_0^t |\Delta b(n,u)|^2 du.
\end{aligned}
$$

Tomando el valor esperado

$$
\begin{aligned}
A &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left(\int_0^s \Delta b(n,u)du\right)^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[t\int_0^t |\Delta b(n,u)|^2 du\right] \\
&= t\int_0^t \mathbb{E}[|\Delta b(n,u)|^2]du.
\end{aligned}
$$

Definimos al proceso $H(s)$ de la forma

$$
H(s) := \int_0^s \Delta\sigma(n,u)dB(u).
$$

Afirmamos que dicho proceso es una martingala bajo los argumentos para el proceso $M(s)$ en (Ecuación 4.7). Haciendo uso de la desigualdad maximal de Doob

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |H(s)|^2\right] \leq 4\mathbb{E}[|H(t)|^2].
$$

Usando la isometría de Itô

$$
\mathbb{E}[|H(s)|^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t |\Delta\sigma(n,u)|^2 du\right].
$$

Esto implica que

$$
\begin{aligned}
B &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left(|H(s)|^2\right)\right] \\
&\leq 4\mathbb{E}[|H(t)|^2] \\
&= 4\mathbb{E}\left[\int_0^t |\Delta\sigma(n,u)|^2 du\right] \\
&= 4\int_0^t \mathbb{E}[|\Delta\sigma(n,u)|^2]du.
\end{aligned}
$$

Definimos el proceso

$$L(s) := \int_0^s \int_{|x|<c} \Delta F(n,u,x)\widetilde{N}(du,dx).$$

Afirmamos que dicho proceso es una martingala. Aplicando la desigualdad de Doob, obtenemos

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t} |L(s)|^2\right] \le 4\mathbb{E}\left[|L(t)|^2\right].$$

Por la isometría de Itô en la medida de Poisson, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|L(t)|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\int_{|x|<c} |\Delta F(n,u,x)|^2 \nu(dx)\right) du\right] \\ &= \int_0^t \int_{|x|<c} \mathbb{E}\left[|\Delta F(n,u,x)|^2\right] \nu(dx)du.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}C &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s \int_{|x|<c} \Delta F(n,u,x)\widetilde{N}(du,dx)\right|^2\right] \\ &\le 4\int_0^t \int_{|x|<c} \mathbb{E}\left[|\Delta F(n,u,x)|^2\right] \nu(dx)du.\end{aligned}$$

Así de (Ecuación 4.13)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|Z_{n+1}(s-)-Z_n(s-)|^2\right] &\le 3(A+B+C)\\
&\le 3\Bigg(t\int_0^t \mathbb{E}\left[|\Delta b(n,u)|^2\right]du\\
&\quad + 4\int_0^t \mathbb{E}\left[|\Delta\sigma(n,u)|^2\right]du\Bigg)\\
&\quad\quad + 4\int_0^t\int_{|x|<c}\mathbb{E}\left[|\Delta F(n,u,x)|^2\right]\nu(dx)du\\
&= 3t\int_0^t \mathbb{E}\left[|\Delta b(n,u)|^2\right]du\\
&\quad + 12\int_0^t \mathbb{E}\left[|\Delta\sigma(n,u)|^2\right]du\\
&\quad\quad + 12\int_0^t\int_{|x|<c}\mathbb{E}\left[|\Delta F(n,u,x)|^2\right]\nu(dx)du.
\end{aligned}
$$

Recordemos que $C_1(t)=\text{máx}\{3t,12\}$, por lo tanto, $3t\le C_1(t)$ y $12\le C_1(t)$, así

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|Z_{n+1}(s-)-Z_n(s-)|^2\right] &\le 3t\int_0^t \mathbb{E}\left[|\Delta b(n,u)|^2\right]du\\
&\quad + 12\int_0^t \mathbb{E}\left[|\Delta\sigma(n,u)|^2\right]du\\
&\quad\quad + 12\int_0^t\int_{|x|<c}\mathbb{E}\left[|\Delta F(n,u,x)|^2\right]\nu(dx)du\\
&\le C_1(t)\int_0^t \mathbb{E}\left[|\Delta b(n,u)|^2\right]du\\
&\quad + C_1(t)\int_0^t \mathbb{E}\left[|\Delta\sigma(n,u)|^2\right]du\\
&\quad\quad + C_1(t)\int_0^t\int_{|x|<c}\mathbb{E}\left[|\Delta F(n,u,x)|^2\right]\nu(dx)du\\
&= C_1(t)\int_0^t\Bigg(\mathbb{E}\left[|\Delta b(n,u)|^2\right]+\mathbb{E}\left[|\Delta\sigma(n,u)|^2\right]\\
&\quad + \int_{|x|<c}\mathbb{E}\left[|\Delta F(n,u,x)|^2\right]\nu(dx)\Bigg)du.
\end{aligned}
$$

Recordemos que si $f:[0,t]$ es una función, entonces para todo $v\in[0,t]$ se cumple que

$$|f(v)| \leq \sup_{0 \leq u \leq t} |f(u)|.$$

Así, tenemos que

$$|Z_n(u-) - Z_{n-1}(u-)|^2 \leq \sup_{0 \leq v \leq u} |Z_n(v) - Z_{n-1}(v)|^2.$$

Tomando valor esperado, el cual, preserva la desigualdad, además, multiplicando por $K_1 > 0$, obtenemos

$$K_1 \mathbb{E}\left[|Z_n(u-) - Z_{n-1}(u-)|^2\right] \leq K_1 \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq v \leq u} |Z_n(v) - Z_{n-1}(v)|^2\right]. \tag{4.14}$$

Por la hipotesis (Ecuación 4.2) la cuál indica que los coeficientes b, σ y F satisfacen

$$\begin{aligned} &|b(y_1) - b(y_2)|^2 + |\sigma(y_1) - \sigma(y_2)|^2 \\ &\qquad + \int_{|x|<c} |F(y_1, x) - F(y_2, x)|^2 \, \nu(dx) \\ &\qquad\qquad \leq K_1 |y_1 - y_2|^2. \end{aligned}$$

Aplicando esto para $y_1 = Z_n(u-)$ y $y_2 = Z_{n-1}(u-)$, además tomando valor esperado, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|b(Z_n(u-)) - b(Z_{n-1}(u-))|^2\right] &+ \mathbb{E}\left[|\sigma(Z_n(u-)) - \sigma(Z_{n-1}(u-))|^2\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_{|x<c|} |F(Z_n(u-), x) - F(Z_{n-1}(u-), x)|^2 \nu(dx)\right] \\ &\leq K_1 \mathbb{E}\left[|Z_n(u-) - Z_{n-1}(u-)|^2\right] \\ &\leq K_1 \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq v \leq u} |Z_n(v) - Z_{n-1}(v)|^2\right]. \end{aligned}$$

Multiplicando por la variable $C_1(t)$ e intregrando en el intervalo $[0, t]$ con respecto a u tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|Z_{n+1}(s)-Z_n(s)|^2\right] = C_1(t)\int_0^t \Bigg(& \mathbb{E}\left[|b(Z_n(u-))-b(Z_{n-1}(u-))|^2\right] \\ & + \mathbb{E}\left[|\sigma(Z_n(u-))-\sigma(Z_{n-1}(u-))|^2\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_{|x|<c}|F(Z_n(u-),x)-F(Z_{n-1}(u-),x)|^2\nu(dx)\right]\Bigg)du \\ \le C_1(t)K_1\int_0^t & \mathbb{E}\left[\sup_{0\le v\le u}|Z_n(u)-Z_{n-1}(u)|^2\right]du.\end{aligned}$$

Ahora bien, para $n \ge 1$ y $t \ge 0$ definimos el siguiente proceso

$$d_n(t) := \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|Z_n(s)-Z_{n-1}(s)|^2\right].$$

Hemos demostrado hasta ahora las siguientes desigualdades

$$d_1(t) = \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|Z_1(s)-Z_0|^2\right] \le C_1(t)K_2(1+\mathbb{E}[|Z_0|^2]). \tag{4.15}$$

$$d_{n+1}(t) = \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|Z_{n+1}(s)-Z_n(s)|^2\right] \le C_1(t)K_1\int_0^t d_n(s)ds. \tag{4.16}$$

Definimos las variables $C_2(t) := tC_1(t)$ y $K_3 := \text{máx}\{K_1, K_2(1+\mathbb{E}[|Z_0|^2])\}$.

Afirmamos que para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$d_n(t) \le \frac{C_2(t)^n K_3^n}{n!}. \tag{4.17}$$

Procediendo por inducción, veamos que se cumple para $n = 1$. Esto es claro, dado que $K_2(1+\mathbb{E}[|Z_0|^2]) \le \text{máx}\{K_1, K_2(1+\mathbb{E}[|Z_0|^2])\} = K_3$, por lo tanto

$$d_1(t) \le C_1(t)tK_2(1+\mathbb{E}[|Z_0|^2]) \le C_2(t)K_3 = \frac{C_2(t)^1K_3^1}{1!}.$$

Suponemos ahora la afirmación es cierta para $n = k$, es decir

$$d_k(t) \le \frac{C_2(t)^kK_3^k}{k!}.$$

Veamos ahora que se cumple para $n = k+1$, vale decir, queremos probar que

$$d_{k+1}(t) \leq \frac{C_2(t)^{k+1} K_3^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Por la (Ecuación 4.16) tenemos

$$d_{k+1} \leq C_1(t) K_1 \int_0^t d_k(s) ds.$$

Usando la Hipotesis de inducción, podemos afirmar que

$$d_{k+1}(t) \leq C_1(t) K_1 \int_0^t d_k(s) ds \leq C_1(t) K_1 \int_0^t \frac{C_2(t)^k K_3^k}{k!}.$$

Aquí debemos considerar los siguientes casos

Caso 1: $t < 1$

Dado que $0 \leq s \leq t < 1$, entonces $3s \leq 3t < 3 < 12$, por lo tanto

$$C_1(s) = \text{máx}\{3s, 12\} = 12 = \text{máx}\{3t, 12\} = C_1(t).$$

Caso 2: $t \geq 1$

Es claro que si $s \leq t$, entonces $3s \leq 3t$, por tanto, podemos afimar

$$C_1(s) = \text{máx}\{3s, 12\} \leq \text{máx}\{3t, 12\} = C_1(t).$$

En ambos casos note que se cumple $C_1(s) \leq C_1(t)$, más aún es claro que $K_1 \leq K_3$, esto implica que $K_1 K_3^k \leq K_3^{k+1}$ por lo tanto

$$
\begin{aligned}
d_{k+1}(t) &\leq C_1(t)K_1 \int_0^t d_k(s)ds \\
&\leq C_1(t)K_1 \int_0^t \frac{C_2(t)^k K_3^k}{k!} ds. \\
&= \frac{C_1(t)K_1K_3^k}{k!} \int_0^t s^k C_1(s)^k ds \\
&\leq \frac{C_1(t)K_3^{k+1}}{k!} \int_0^t s^k C_1(s)^k ds \\
&\leq \frac{C_1(t)K_3^{k+1}}{k!} \int_0^t s^k C_1(t)^k ds \\
&= \frac{C_1(t)C_1(t)^k K_3^{k+1}}{k!} \int_0^t s^k ds \\
&= \frac{C_1(t)^{k+1} K_3^{k+1}}{k!} \frac{t^{k+1}}{k+1} \\
&= \frac{t^{k+1} C_1(t)^{k+1} K_3^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{C_2(t)^{k+1} K_3^{k+1}}{(k+1)!}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$
d_n(t) \leq \frac{C_2^k K_3^n}{n!}.
$$

Veamos que la sucesión $\{Z_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en L^2 usando la norma $\|\cdot\|_2 := [\mathbb{E}(|\cdot|^2)]^{1/2}$ el cuál hace de L^2 un espacio completo.

Sean $m, n\mathbb{N}$, sin perdida de generalidad, supongamos que $m < n$, aplicando la desigualdad del triangulo, podemos afirmmar que para cada $0 \leq s \leq t$ se cumple

$$
\begin{aligned}
\|Z_n(s) - Z_m(s)\|_2 &= \left\| \sum_{r=m+1}^{n} (Z_r(s) - Z_{r-1}(s)) \right\|_2 \\
&\leq \sum_{r=m+1}^{n} \|Z_r(s) - Z_{r-1}(s)\|_2.
\end{aligned}
$$

De la (Ecuación 4.17) sabemos que para cada $r = m+1, m+2, \dots, n$ se cumple

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |Z_r(s) - Z_{r-1}(s)|^2 \right] \leq \frac{C_2(t)^r K_3^r}{r!}.
$$

Dado que son terminos no negativos, tomando raíz se puede afirmar que

$$
\begin{aligned}
\|Z_r(s) - Z_{r-1}(s)\|_2 &\leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t} |Z_r(s) - Z_{r-1}(s)|^2\right]} \\
&\leq \frac{C_2(t)^{r/2} K_3^{r/2}}{(r!)^{r/2}}.
\end{aligned}
$$

Por tanto para cada $0 \leq s \leq t$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\|Z_n(s) - Z_m(s)\|_2 &\leq \sum_{r=m+1}^{n} \|Z_r(s) - Z_{r-1}(s)\|_2 \\
&\leq \sum_{r=m+1}^{n} \frac{C_2(t)^{r/2} K_3^{r/2}}{(r!)^{r/2}}.
\end{aligned}
$$

Definimos la siguiente variable

$$
A' := C_2(t) K_3 > 0.
$$

Reescribiendo el termino de la suma de la siguiente forma

$$
a_r = \frac{A^{r/2}}{(r!)^{1/2}} = \left(\frac{A^r}{r!}\right)^{1/2}. \tag{4.18}
$$

Veamos la convergencía de la serie

$$
\sum_{r=1}^{\infty} a_r = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{A^r}{r!}\right)^{1/2}.
$$

Considerando el cociente del término a_r tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{r+1}}{a_r} &= \frac{\left(\frac{A^{r+1}}{(r+1)!}\right)^{1/2}}{\left(\frac{A^r}{r!}\right)^{1/2}} \\
&= \left(\frac{A^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \frac{r!}{A^r}\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{A}{r+1}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Ahora tomando el límite cuando $r \to \infty$

$$
\lim_{r\to\infty} \frac{a_{r+1}}{a_r} = \lim_{r\to\infty} \sqrt{\frac{A}{r+1}} = 0.
$$

Dado que este límite es estrictamente menor que 1, por el criterio de la razón, podemos afirmar que la serie converge absolutamente esto implica que la serie converge, más aún, su cola converge, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\sum_{r=N+1}^{\infty} \frac{C_2(t)^{r/2} K_3^{r/2}}{(r!)^r/2} < \varepsilon.
$$

Entonces, para todo $n, m \geq N$ tales que $m < n$ y todo $s \in [0, t]$

$$
\|Z_n(s) - Z_m(s)\|_2 \leq \sum_{r=m+1}^{n} \frac{C_2(t)^{r/2} K_3^{r/2}}{(r!)^{r/2}} \leq \sum_{r=N+1}^{\infty} \frac{C_2(t)^{r/2} K_3^{r/2}}{(r!)^{r/2}} < \varepsilon.
$$

Por lo tanto, podemos afirmar que $(Z_n(s))$ es una sucesión de Cauchy en L^2.

Al ser $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de Banach, vale decir, es un espacio completo con la norma $\|\cdot\|_2$, entonces toda sucesión de Cauchy converge en L^2. Luego existe $Z(s) \in L^2$ tal que

$$
\lim_{m\to\infty} \|Z_m(s) - Z(s)\|_2 = 0, \quad \forall s \in [0, t]. \tag{4.19}
$$

Cómo $m < n$, por la desigualdad del triángulo, afirmamos que

$$
\|Z(s) - Z_n(s)\|_2 \leq \|Z(s) - Z_m(s)\|_2 + \|Z_m(s) - Z_n(s)\|_2.
$$

Tomando límite cuando $m \to \infty$ en ambos lados; por la Ecuación 4.19 tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} \|Z_m(s) - Z(s)\|_2 = 0.$$

Luego, dado que ya se demostró que la seríe dada por Ecuación 4.18 converge entonces

$$\lim_{m\to\infty} \|Z_m(s) - Z_n(s)\|_2 \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{r=n+1}^{m} \frac{C_2(t)^{r/2} K_3^{r/2}}{(r!)^{r/2}} = \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{C_2(t)^{r/2} K_3^{r/2}}{(r!)^{r/2}}.$$

Además el termino $\|Z(s) - Z_n(s)\|_2$ no depende de m, por lo tanto

$$\|Z(s) - Z_n(s)\|_2 \leq \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{C_2(t)^{r/2} K_3^{r/2}}{(r!)^{r/2}}.$$

Consideremos ahora la siguiente notación

$$X_n := \sup_{0\leq s\leq t} |Z_n(s) - Z_{n-1}(s)|.$$

Queremos encontrar una cota para

$$\mathbb{P}\left(X_n \geq \frac{1}{2^n}\right).$$

Aplicando a X_n^2 Chebyshev-Markov tenemos que

$$\mathbb{P}\left(X_n \geq \frac{1}{2^n}\right) = \mathbb{P}\left(X_n^2 \geq \frac{1}{4^n}\right) \leq 4^n \mathbb{E}[X_n^2]. \tag{4.20}$$

Notemos que $\mathbb{E}[X_n^2]$ ya esta acotado dado por la Ecuación 4.17, así

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |Z_n(s) - Z_{n-1}(s)|^2\right] \leq \frac{C_2(t)^n K_3^n}{n!}.$$

De la Ecuación 4.20, esto implica que

$$\mathbb{P}\left(X_n \geq \frac{1}{2^n}\right) \leq 4^n \frac{C_2(t)^2 K_3^n}{n!} = \frac{(4C_2(t)K_3)^n}{n!}.$$

Más aún, sabemos que la seríe $\frac{C_2(t)^n K_3^n}{n!}$, esto implica que $\frac{(4C_2(t)K_3)^n}{n!}$ también coverge, por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t} |Z_n(s) - Z_{n-1}(s)| \ge \frac{1}{2^n} \right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4C_2(t)K_3)^n}{n!} < \infty.$$

De aquí es posible usar el Lema de Borell-Cantelli, es decir, podemos afirmar

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \left\{ \sup_{0\le s\le t} |Z_n(s) - Z_{n-1}(s)| \ge \frac{1}{2^n} \right\} \right) = 0.$$

La estimación obtenida nos dice que la probabilidad de que las diferencias consecutivas $|Z_n(s) - Z_{n-1}(s)|$ sean “grandes” (mayores que $1/2^n$) se vuelve extremadamente pequeña a medida que n crece, tan pequeña que la suma de todas esas probabilidades es finita.

En otras palabras, casi todas las trayectorias de la sucesión (Z_n) se vuelven uniformemente estables, a partir de algún momento, los términos de la sucesión ya no cambian mucho entre sí, ni en ningún instante del intervalo $[0, t]$.

Esto garantiza que, con probabilidad 1, la sucesión $(Z_n(\cdot))$ converge uniformemente en $[0, t]$ a una función límite $Z(\cdot)$. Es decir, no solo converge punto a punto, sino que lo hace de manera controlada en todo el intervalo al mismo tiempo.

Veamos ahora que dicha solución es única, así supongamos que $Z^{(1)} = (Z^{(1)}(t))_{t\ge 0}$ y $Z^{(2)} = (Z^{(2)}(t))_{t\ge 0}$ son dos soluciones fuertes de la SDE modificada, es decir, procesos adaptados, càdlàg, cuadrado-integrables y que satisfacen, para todo $t \ge 0$, las ecuaciones integrales:

$$\begin{aligned} Z^{(i)}(t) = Z_0 &+ \int_0^t b(Z^{(i)}(s-))\, ds \\ &+ \int_0^t \sigma(Z^{(i)}(s-))\, dB(s) \\ &+ \int_0^t \int_{|x|<c} F(Z^{(i)}(s-), x)\, \tilde{N}(ds, dx), \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, casi seguramente. Queremos ver que $Z^{(1)}(t) = Z^{(2)}(t)$ para todo $t \ge 0$ con probabilidad 1. Restando las dos ecuaciones de $Z^{(1)}$ y $Z^{(2)}$ tenemos que

$$\begin{aligned} Z^{(1)}(t) - Z^{(2)}(t) = &\int_0^t [b(Z^{(1)}(s-)) - b(Z^{(2)}(s-))]\, ds \\ &+ \int_0^t [\sigma(Z^{(1)}(s-)) - \sigma(Z^{(2)}(s-))]\, dB(s) \\ &+ \int_0^t \int_{|x|<c} [F(Z^{(1)}(s-), x) - F(Z^{(2)}(s-), x)]\, \tilde{N}(ds, dx). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Definimos la siguiente notación

$$\begin{aligned}\Delta b(s) &:= b(Z^{(1)}(s-)) - b(Z^{(2)}(s-))\\ \Delta\sigma(s) &:= \sigma(Z^{(1)}(s-)) - \sigma(Z^{(2)}(s-))\\ \Delta F(s,x) &:= F(Z^{(1)}(s-),x) - F(Z^{(2)}(s-),x)\end{aligned}$$

Nuestro objetivo ahora es estimar $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}|Z^{(1)}(t)-Z^{(2)}(t)|^2\right]$. Para ello, similar al procedimiento anterior, elevando al cuadrado la Ecuación 4.21, tomando supremo y despues esperanza en el intervalo $[0,t]$ tenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}|Z^{(1)}(s)-Z^{(2)}(s)|^2\right] \leq 3\Bigg(&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s[\Delta b(s)]du\right|^2\right]\\ &+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s[\sigma(s)]dB(u)\right|^2\right]\\ &+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s\int_{|x|<c}[\Delta F(u,x)]\widetilde{N}(du,dx)\right|^2\right]\Bigg).\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz para integrales, para el primer termino de la desigualdad tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_0^s \Delta b(u)du\right|^2 &\leq s\int_0^s |\Delta b(u)|^2du\\ &\leq t\int_0^t |\Delta b(u)|^2du.\end{aligned}$$

Dado que $s\leq t$ al tomar supremo y valor esperado obtenemos la cota

$$\mathbb{E}\left[\sup_{o\leq s\leq t}\left|\int_0^s \Delta b(u)du\right|^2\right] \leq t\int_0^t \mathbb{E}[|\Delta b(u)|^2]du.$$

Bajo argumentos similares utilizados anteriormente, afirmamos que el proceso

$$\int_0^s \Delta\sigma(u)\ dB(u),$$

es una martingala local continua, por tanto, usando la desigualdad maximal de Doob tenemos

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s \Delta\sigma(u)dB(u)\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \Delta\sigma(s)\ dB(s)\right|^2\right].$$

De aquí, usando la isometría de Itô

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \Delta\sigma(s)dB(s)\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t |\Delta\sigma(s)|^2 ds\right].$$

Esto implica que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |\Delta\sigma(s)|^2 ds\right] = \int_0^t \mathbb{E}[|\Delta\sigma(s)|^2 ds].$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s \Delta\sigma(u)\ dB(u)\right|^2\right] \leq 4\int_0^t \mathbb{E}[|\Delta\sigma(s)|^2 ds].$$

Podemos afirmar ahora que el siguiente proceso es una martingala local càdlàg

$$\int_0^s \int_{|x|<c} \Delta F(u,x)\widetilde{N}(du,dx).$$

Nuevamente aplicando la desigualdad maximal de Doob la isometría de Itô para integrales respecto a $\widetilde{N}$ tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s \int_{|x|<c} \Delta F(u,x)\widetilde{N}(du,dx)\right|^2\right] \leq 4\int_0^t \int_{|x|<c} \mathbb{E}[|\Delta F(s,x)|^2]\nu(dx)ds.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|Z^{(1)}(s)-Z^{(2)}(s)\right|^2\right] \le & 3t\int_0^t \mathbb{E}[|\Delta b(s)|^2]ds \\ & + 12\int_0^t \mathbb{E}[|\Delta\sigma(s,x)|^2 ds] \\ & + 12\int_0^t\int_{|x|<c}\mathbb{E}[|\Delta F(s,x)|^2]\nu(dx)ds.\end{aligned}$$

Usando y factorizando la variable ya definida $C_1(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|Z^{(1)}(s)-Z^{(2)}(s)\right|^2\right] \le & C_1(t)\int_0^t \Bigg(\mathbb{E}[|\Delta b(s)|^2]+\mathbb{E}[|\Delta\sigma(s)|^2] \\ & + \int_{|x|<c}\mathbb{E}[|\Delta F(s,x)|^2]\nu(dx)\Bigg)ds.\end{aligned}$$

De manera similar como ya se hizo en el análisis de la diferencia entre Z_n y Z_{n-1} en la iteración de Picard, haciendo uso de la condición (Ecuación 4.2) podemos obtener

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|Z^{(1)}(s)-Z^{(2)}(s)\right|^2\right] \le C_1(t)K_1\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le s}|Z^{(1)}(u)-Z^{(2)}(u)|^2\right]ds.$$

De esta forma definimos ahora la función

$$D(t) := \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|Z^{(1)}(s)-Z^{(2)}(s)\right|^2\right].$$

Es claro que $D(t)\ge 0$ para toda $t\ge 0$. Fijando a $T\ge 0$, podemos afirmar que para todo $t\in[0,T]$ la variable $C_1(t)\le C_1(T)<\infty$. Por el Teorema de Gronwall tenemos que

$$D(t)\le 0\cdot e^{C_1(T)K_1}=0,\qquad t\in[0,T].$$

Por la arbitrariedad de T, tenemos que para todo $t\ge 0$ se cumple

$$D(t)=\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|Z^{(1)}(s)-Z^{(2)}(s)\right|^2\right]=0.$$

Por lo tanto, por propiedad de la esperanza podemos afirmar que

$$\sup_{0\le s\le t}\left|Z^{(1)}(s)-Z^{(2)}(s)\right|^2=0\ \text{ c.s.}$$

Es decir, $Z^{(1)}(s) = Z^{(2)}(s)$ para toda $s \in [0,t]$, $c.s.$ Definimos

$$A_n := \left\{\omega : Z^{(1)}(s,\omega) = Z^{(2)}(s,\omega) \text{ para todo} s \in [0,n]\right\}.$$

Sabemos que $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y también

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{\omega : Z^{(1)}(t,\omega) = Z^{(2)}(t,\omega) \text{ para todo } t \geq 0\right\}.$$

Por la continuidad de la probabilidad (propiedad de medidas):

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

Veamos el caso cuando $\mathbb{E}[|Z_0|^2] = \infty$. En teoria de probabilidad, al truncar una variable aleatoria podemos cortarla cuando esta está fuera de un rango finito, reemplazando sus valores extremos por cero o por el valor de dicho borde. Vamos aproximar Z_0 por una sucesión de variables acotadas, para más adelante garantizar la existencia y unicidad de una solución a la Ecuación 4.1. Definimos el truncamiento de la variable aleatoria Z_0 de la forma

$$Z_0^{(n)} := Z_0 \cdot 1_{\{|Z_0| \leq n\}},$$

Donde

$$1_{\{|Z_0| \leq n\}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } |Z_0(\omega)| \leq n, \\ 0, & \text{si } |Z_0(\omega)| > n. \end{cases}$$

Esto implica que

$$Z_0^{(n)}(\omega) = \begin{cases} Z_0(\omega), & \text{si } |Z_0(\omega)| \leq n, \\ 0, & \text{si } |Z_0(\omega)| > n. \end{cases}$$

Esto garantiza que $\mathbb{E}[|Z_0^{(n)}|^2] \leq n^2 < \infty$, por otro lado, cómo Z_0 es $\boldsymbol{\mathcal{F}}$- medible y $1_{\{|Z_0| \leq n\}}$ también lo es, entonces $Z_0^{(n)}$ es $\mathcal{F}$-medible.

Fijemos $\omega \in \Omega$ tal que $|Z_0(\omega)| < \infty$, por tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|Z_0(\omega)| \leq N$, de aquí, para todo $n \geq N$, se tiene $|Z_0(\omega)| \leq n$, más aún, $Z_0^{(n)}(\omega) = Z_0(\omega)$. Esto implica que, para casi todo $\omega \in \Omega$, la sucesión $(Z_0^{(n)}(\omega))$ es constante e igual a $Z_0(\omega)$. Así, por definición de convergencia puntual, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} Z_0^{(n)}(\omega) = Z_0(\omega), \text{ para casi todo } \omega.$$

Por lo tanto

$$Z_0^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.s.}} Z_0,$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ la variable $Z_0^{(n)}$ es $\mathcal{F}_0$-medible y acotada. Lo que nos permite afirmar que pertenece a $L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$. En consecuencia, es posible aplicar los argumentos anteriores, cuando $\mathbb{E}[|Z_0|^2] < \infty$, para afirmar que existe una única solución fuerte de la Ecuación 4.1, digamos $Z^{(n)}$, con condición inicial $Z_0^{(n)}$.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$\Omega_N := \{\omega \in \Omega : |Z_0(\omega)| \leq N\}.$$

Esto implica, para cualquier $m > n \geq N$, se tiene

$$Z_0^{(m)}(\omega) = Z_0(\omega) = Z_0^{(n)} \text{ para todo } \omega \in \Omega_N. \tag{4.22}$$

Es deicr, en Ω_N, las condiciones iniciales de $Z^{(m)}$ y $Z^{(n)}$ son iguales. Por lo tanto, para todo $t \geq 0$ se cumple que

$$Z^{(m)}(t) = Z^{(n)}(t) \text{ c.s.}$$

Queremos ver ahora que la sucesión $\{Z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en probabilidad, es decir, dado $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq N$, se cumple

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0} |Z^{(n)}(t) - Z^{(m)}(t)| > \delta\right) < \varepsilon.$$

Notemos que de los conjuntos anteriormente definidos, cumplen que $\Omega_N \subset \Omega_{N+1}$. Por otro lado, al ser Z_0 una variable aleatoria real, entonces $\mathbb{P}(|Z_0| < \infty) = 1$. Así al ser Ω_N una sucesión de conjuntos crecientes, se tiene

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \{|Z_0| < \infty\}.$$

Por la continuidad de la probabilidad, podemos afirmar $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Omega_n) = 1$. Esto implica que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{P}(\Omega_N) > 1 - \varepsilon. \tag{4.23}$$

De Ecuación 4.22 sabemos que

$$\sup_{t\geq 0} |Z^{(n)}(t) - Z^{(m)}(t)| = 0 \quad \text{en } \Omega_N$$

Por lo tanto, si la diferencia es distinta de cero, es decir, para $\delta > 0$, solo puede ocurrir fuera de Ω_N, esto es, ocurre en el complemento de Ω_N. Entonces

$$\left\{ \omega : \sup_{t\geq 0} |Z^{(n)}(t) - Z^{(m)}(t)| > \delta \right\} \subset \Omega_N^c.$$

Por propiedad básica de la probabilidad, podemos afirmar

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0} |Z^{(n)}(t) - Z^{(m)}(t)| > \delta \right) \leq \mathbb{P}(\Omega_N^c).$$

Más aún, notemos que $\mathbb{P}(\Omega_N^c) = 1 - \mathbb{P}(\Omega_N)$, por la Ecuación 4.23, entonces $\mathbb{P}(\Omega_N^c) < \varepsilon$. De la ecuación anterior, podemos afirmar

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0} |Z^{(n)}(t) - Z^{(m)}(t)| > \delta \right) < \varepsilon, \quad \forall\ m, n \geq N$$

Por lo tanto, la sucesión $(Z^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en probabilidad. Al estar en L^2 podemos afirmar que existe un proceso $Z = \{Z(t)\}_{t\geq 0}$ de tal forma que

$$\sup_{t\geq 0} |Z^{(n)}(t) - Z(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Por el teorema de convergencia de sucesiones de Cauchy en probabilidad, para la sucesión es posible extraer una subsucesión $\{Z_{n_k}\}$ tal que se cumple

$$\sup_{t\geq 0} |Z^{(n_k)}(t) - Z(t)| \xrightarrow[k\to\infty]{\text{c.s.}} 0.$$

De aquí, notemos que por construcción, cada $Z^{(n_k)}$ posee trayectorias càdlàg, y la convergencia es uniforme casi segura, entonces el límite Z admite una versión càdlàg. Por otro lado, dado que cada $Z^{(n_k)}$ es adaptado y su convergencia al proceso Z es uniforme, basta notar que la adaptabilidad de un proceso se converva bajo convergencia puntual, en nuestro caso, convergencia uniforme casi seguramente, por tanto podemos afirmar que el límite Z es adaptado.

Analicemos ahora la unicidad de dicha solución. Procediendo por contradicción, supongamos que existe otra solución fuerte $Z' = (Z'(t))_{t\geq 0}$ con la misma condición inicial Z_0. Fijando a $N \in \mathbb{N}$, consideremos al conjunto Ω_N, ya sabemos que en este conjunto la condición incial es acotada y además por el caso $\mathbb{E}[|Z_0|^2] < \infty$ la solución es única. Por lo tanto

$$Z'(t)(\omega) = Z_M(t)(\omega) \quad \text{para todo } t \geq 0, \qquad \forall \omega \in \Omega_N \text{ c.s.}$$

para cualquier $M \geq N$, donde Z_M es la solución con condición inicial truncada $Z^{(M)} = Z_0$ en Ω_N. Asumamos que esto falla para algún $M \geq N$, es decir, existe un conjunto $A \subset \Omega_N$ con $\mathbb{P}(A) > 0$ tal que $Z'(t)(\omega) \neq Z_M(t)(\omega)$ con $\omega \in A$. Podemos definir un nuevo proceso, llamemos a este Z''_M, mediante

$$Z''_M(t)(\omega) = \begin{cases} Z'(t)(\omega), & \omega \in A, \\ Z_M(t)(\omega) & \omega \notin A. \end{cases}$$

Dado que $A \subset \Omega_N$, entonces $A \in \mathcal{F}_0$, podemos afirmar que Z'' es adaptado, pues Z' y $Z^{(M)}$ son dos procesos adaptados en un conjunto $\mathcal{F}_0$-medible. Luego, al ser Z'' la combinación de dos funciones càdlàg entonces Z'' es càdlàg.

Notemos que si $\omega \in A \subset \Omega_N \subset \Omega_M$, entonces

$$Z''_M(0)(\omega) = Z'(0)(\omega) = Z_0(\omega) = Z_0^{(M)}(\omega),$$

por otro lado, si $\omega \notin A$, esto implica que

$$Z''_M(0)(\omega) = Z^{(M)}(0)(\omega) = Z_0(\omega),$$

en ambos casos se tiene que $Z''_M(0) = Z^{(M)}(0)$ con $\omega \in A$ casi seguramente.

Entonces Z''_M y $Z^{(M)}$ son dos soluciones de la Ecuación 4.1 con la misma condición inicial, por construcción, en el conjunto A, se tiene que $Z''_M(t) \neq Z^{(M)}(t)$ para algún t. Lo cual es una contradicción al caso cuando $\mathbb{E}[|Z_0|^2] < \infty$ donde se establece la unicidad casi segura de la solución fuerte.

Dado que al suponer $\mathbb{P}(A) > 0$ nos lleva a una contradicción, podemos afirmar que $\mathbb{P}(A) = 0$, es decir, $Z'(t) = Z^{(M)}(t)$ para todo $t \geq 0$, casi seguramente en Ω_N. Esto vale para todo $N \in \mathbb{N}$, como

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{N=1}^{\infty}\Omega_N\right) = 1,$$

podemos concluir

$$\mathbb{P}(Z'(t) = Z(t) \text{ para todo } \ t \geq 0) = 1.$$

Por lo tanto, la solución fuerte es única casi seguramente $\square$

5 Estabilidad media cuadrática

Consideremos la ecuación diferencial estocástica con saltos

$$dX(t) = aX(t-)dt + bX(t-)dW(t) + cX(t-)dN(t), \qquad t \geq 0, \tag{5.1}$$

con condición inicial $X(0) = X_0$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes, $W(t)$ es un movimiento browniano estándar y $N(t)$ es un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$, definido sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Nuestro objetivo es presentar el proceso de deducción de la solución explícita de la Ecuación 5.1. La herramienta que usaremos para el análisis de la ecuación diferencial estocástica con saltos será el lema de Itô para procesos de difusión con saltos. Con esto, consideremos un proceso estocástico $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ de la forma

$$dY(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) + \gamma(t)dN(t),$$

donde $\mu(t), \sigma(t), \gamma(t)$ son procesos adaptados, $W(t)$ es un movimiento browniano y $N(t)$ es un proceso de Poisson. Para una función $f \in C^2\{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\}$ el diferencial estocástico de $f(t, Y(t))$ está dado por

$$\begin{aligned} df(t, Y(t)) = {} & \frac{\partial f}{\partial t}(t, Y(t-))dt \\ & + \frac{\partial f}{\partial y}(t, Y(t-))[\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)] \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, Y(t-))\sigma(t)^2 dt \\ & + [f(t, Y(t-) + \gamma(t)) - f(t, Y(t-))]dN(t). \end{aligned}$$

Notemos que el último término representa el cambio finito en f cuando ocurre unn salto de tamaño $\gamma(t)$ en Y.

Para nuestro caso, para facilitar el tratamiento de los saltos, vamos a introducir el proceso de Poisson compensado definido por

$$\widetilde{N}(t) := N(t) - \lambda t, \qquad t \geq 0.$$

Sabemos que este preceso es una martingala con esperanza $\mathbb{E}[\widetilde{N}(t)] = 0$, varianza $\mathbb{E}[|\widetilde{N}(t)|^2] = \lambda t$, además los incrementos en dicho proceso son independientes.

Teorema 5.1. *Consideremos la ecuación diferencial estocástica lineal con saltos*

$$dX(t) = aX(t-)dt + bX(t-)dW(t) + cX(t-)dN(t), \quad t \geq 0, \tag{5.2}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes, $W(t)$ es un movimiento browiniano y $N(t)$ es un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$. Definimos el siguiente parámetro de estabilidad

$$l := 2a + b^2 + \lambda c(2 + c),$$

y se sabe que la solución análitica es estable en media cuadrática, es decir

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[|X(t)|^2] = 0,$$

si y solo si $l < 0$.

Sea $\Delta t > 0$ un tamaño de paso fijo y $\theta \in [0, 1]$ el paramétro del método theta compensado estocástico (CSTM). Al aplicar dicho método a Ecuación 5.2, si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, entonces el método es estable en media cuadrática, es decir, para todo $\Delta t > 0$ se cumple que las aproximaciones numéricas heredan la estabilidad de la solución análitica siempre que $l < 0$.

Si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, el método es estable en media cuadrática si y solo si el tamaño del paso satisface

$$\Delta t < \frac{-l}{(1 - 2\theta)(a + \lambda c)^2}.$$

Demostración. Cómo primer paso, comenzaremos aplicando el método theta compensado estocástico a la Ecuación 5.2, con condición inicial $X(0) = X_0$. Para aplicar dicho método (CSTM) definimos el proceso de Poisson compensado de la forma $\widetilde{N}(t) := N(t) - \lambda t$, el cuál es una martingala y satiisface $\mathbb{E}[\widetilde{N}(t)] = 0$ y $\mathbb{E}[|\widetilde{N}(t)|^2] = \lambda t$. Por lo tanto, esto nos permite reescribir la Ecuación 5.2 de la forma equivalente

$$\begin{aligned} dX(t) &= aX(t-)dt + bX(t-)dW(t) + cX(t-)dN(t) \\ &= aX(t-)dt + bX(t-)dW(t) + cX(t-)d(\widetilde{N}(t) + \lambda t) \\ &= aX(t-)dt + bX(t-)dW(t) + cX(t-)d\widetilde{N}(t) + \lambda cX(t-)dt \\ &= (a + \lambda c)X(t)dt + bX(t-)dW(t) + cX(t-)d\widetilde{N}(t). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Para un tamaño de paso constante $\Delta t > 0$, definimos la malla $t_n = n\Delta t$ con $n \in \mathbb{N}$. El método (CSTM) aplicado a la Ecuación 5.3 genera un sucesión de aproximaciones $Y_n \approx X(t_n)$ mediante la ecuación de diferencias implícita dada por

$$\begin{aligned} Y_{n+1} =& Y_n + (1-\theta)\Delta t(a+\lambda c)Y_n \\ &+ \theta\Delta t(a+\lambda c)Y_{n+1} + bY_n\Delta W_n + cY_n\Delta\widetilde{N}_n, \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde $\theta \in [0,1]$ es un parámetro del método, los incrementos estocásticos se definen de la forma

$$\begin{aligned} \Delta W_n &:= W(t_{n+1}) - W(t_n) \\ \Delta\widetilde{N}_n &:= \widetilde{N}(t_{n+1}) - \widetilde{N}(t_n). \end{aligned}$$

Notemos que, dichos incrementos son independientes entre sí, además satifacen que $\mathbb{E}[\Delta W_n] = \mathbb{E}[\Delta\widetilde{N}_n] = 0$, $\mathbb{E}[|\Delta W_n|^2] = \Delta t$ y $\mathbb{E}[|\Delta\widetilde{N}_n|^2] = \lambda\Delta t$.

Reorganizando la Ecuación 5.4 de tal forma que podamos expresar de forma explícita el término Y_{n+1} en términos de Y_n, obtenemos

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - \theta\Delta t(a+\lambda c)Y_{n+1} = Y_n &+ (1-\theta)\Delta t(a+\lambda c)Y_n \\ &+ bY_n\Delta W_n + cY_n\Delta\widetilde{N}_n. \end{aligned}$$

De aquí, factorizando el término Y_{n+1} del lado izquierdo y el término Y_n del lado derecho

$$\begin{aligned} (1-\theta\Delta t(a+\lambda c))Y_{n+1} &= Y_n + (1-\theta)\Delta t(a+\lambda c)Y_n \\ &\quad + bY_n\Delta W_n + cY_n\Delta\widetilde{N}_n \\ &= [1 + (1-\theta)\Delta t(a+\lambda c) + b\Delta W_n + c\Delta\widetilde{N}_n]Y_n. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Dado que por hipótesis sabemos que $l = 2a + b^2 + \lambda c(2+c) < 0$, podemos notar

$$\begin{aligned} 2a + b^2 + \lambda c(2+c) &= 2a + 2\lambda c + b^2 + \lambda c^2 \\ &= 2(a+\lambda c) + b^2 + \lambda c^2 < 0, \end{aligned}$$

es claro que $b^2 + \lambda c^2 > 0$, esto implica que $(a+\lambda c) < 0$. Con esto, podemos afirmar que para Δt lo suficientemente pequeño, el término $1 - \theta\Delta t(a+\lambda c)$ no se anula y es positivo.

Por otro lado, veamos la esperanza del segundo momento de Ecuación 5.5. Elevando al cuadrado y obteniendo el valor esperado, tenemos

$$
\begin{aligned}
(1-\theta\Delta t(a+\lambda c))^2\mathbb{E}[|Y_{n+1}|^2] = \mathbb{E}\Bigg[\Bigg|&1+(1-\theta)\Delta t(a+\lambda c) \\
&+ b\Delta W_n + c\Delta\widetilde{N}_n\Bigg|^2\Bigg]\mathbb{E}[|Y_n|^2].
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

Vamos a desarrollar la esperanza del término estocástico. Para faciliatr el proceso, definimos la siguiente notación

$$
\begin{aligned}
A &:= 1+(1-\theta)\Delta t(a+\lambda c) \\
B &:= b\Delta W_n \\
C &:= c\Delta\widetilde{N}_n.
\end{aligned}
$$

Notemos que A es una constante determinista, mientras que B y C son variables aleatorias. Por tanto, aplicando la linealidad de la esperanza, el término estocástico de la Ecuación 5.6 queda de la forma

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[|A+B+C|^2] &= \mathbb{E}[A^2+B^2+C^2 \\
&\quad + 2AB + 2AC + 2BC] \\
&= \mathbb{E}[A^2]+\mathbb{E}[B^2]+\mathbb{E}[C^2] \\
&\quad + \mathbb{E}[2AB]+\mathbb{E}[2AC]+\mathbb{E}[2BC].
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Utilizando las propiedades de los incrementos independientes, podemos afirmar que $\mathbb{E}[B] = b\mathbb{E}[\Delta W_n] = 0$ y $\mathbb{E}[C] = c\mathbb{E}[\Delta\widetilde{N}_n] = 0$. Además, $\mathbb{E}[2AB] = 2Ab\mathbb{E}[\Delta W_n] = 0$ y $\mathbb{E}[2AC] = 2Ac\mathbb{E}[\Delta\widetilde{N}_n] = 0$. Luego, por la independiencia entre el movimiento browniano y el proceso de Poisson compensado, se cumple $\mathbb{E}[BC] = bc\mathbb{E}[\Delta W_n\Delta\widetilde{N}_n] = bc\mathbb{E}[\Delta W_n]\mathbb{E}[\Delta\widetilde{N}_n] = 0$.

Por otro lado, $\mathbb{E}[B^2] = b^2\mathbb{E}[(W_n)^2] = b^2\Delta t$ y $\mathbb{E}[C^2] = c^2\mathbb{E}[(\widetilde{N}_n)^2] = c^2\lambda\Delta t$. Por lo tanto, de la Ecuación 5.7 tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[|A+B+C|^2] &= A^2 + b^2\Delta t + \lambda c^2\Delta t \\
&= (1+(1-\theta)\Delta t(a+\lambda c))^2 \\
&\quad + b^2\Delta t + \lambda c^2\Delta t.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo esto en Ecuación 5.6 tenemos

$$
\begin{aligned}
(1-\theta\Delta t(a+\lambda c))^2\mathbb{E}[|Y_{n+1}|^2] = \Bigg[&(1+(1-\theta)\Delta t(a+\lambda c))^2 \\
&+ b^2\Delta t + \lambda c^2\Delta t\Bigg]\mathbb{E}[|Y_n|^2].
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

Notemos que la Ecuación 5.8 describe el cambio del segundo momento de la solución numérica. Ahora bien, para que el método sea estable en media cuadrática, es necesario que la sucesión $\mathbb{E}[|Y_n|^2]$ sea decreciente y tienda a cero cuando n tiende a infinito. Esto ocurre si y solo si

$$\frac{(1+(1-\theta)\Delta t(a+\lambda c))^2 + b^2\Delta t + \lambda c^2 \Delta t}{(1-\theta\Delta t(a+\lambda c))^2} < 1 \tag{5.9}$$

Recordemos que anteriormente ya se mencionó que el término $1-\theta\Delta t(a+\lambda c)$ es no nulo y positivo, por lo que es posible multiplicar la Ecuación 5.9 por el denominador y seguir conservando la desigualdad, es decir

$$(1+(1-\theta)\Delta t(a+\lambda c))^2 + b^2\Delta t + \lambda c^2\Delta t < (1-\theta\Delta t(a+\lambda c))^2 \tag{5.10}$$

Para facilitar la notación, definimos la variable $K := a+\lambda c$. Además, expandiendo la expresión del lado derecho de la desigualdad de la forma

$$\begin{aligned}(1-\theta\Delta t(a+\lambda c))^2 &= (1-\theta\Delta t K)^2\\ &= 1-2\theta\Delta t k + \theta^2\Delta t^2 K^2.\end{aligned}$$

De igual forma, al extender el término al cuadrado del lado izquierdo de la Ecuación 5.10

$$\begin{aligned}(1+(1-\theta)\Delta t(a+\lambda c))^2 &= (1+(1-\theta)\Delta t K)^2\\ &= 1+2(1-\theta)\Delta t K + (1-\theta)^2\Delta t^2 K^2.\end{aligned}$$

De esta manera, ordenando los terminos, la Ecuación 5.10 se expresa como se sigue

$$\begin{aligned}&1+2(1-\theta)\Delta t K + b^2\Delta t\\ &\qquad + \lambda c^2\Delta t + (1-\theta)^2\Delta t^2 K^2 < 1-2\theta\Delta t K + \theta^2\Delta t^2 K^2.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Restando el termino 1 en ambos lados de la desigualdad, además reordenando adecuadamente y agrupando los términos con factores Δt y Δt^2, tenemos

$$\begin{aligned}&-2\theta K\Delta t - 2(1-\theta)K\Delta t - b^2\Delta t\\ &\qquad - \lambda c^2\Delta t + \theta^2 K^2\Delta t^2 - (1-\theta)^2K^2\Delta t^2 > 0\\ &(-2\theta K - 2(1-\theta)K - b^2 - \lambda c^2)\Delta t\\ &\qquad + (\theta^2 - (1-\theta)^2)K^2\Delta t^2 > 0\\ &(-2\theta K - 2K + 2\theta K - b^2 - \lambda c^2)\Delta t\\ &\qquad + (\theta^2 - (1-2\theta+\theta^2))K^2\Delta t^2 > 0\\ &(-2K - b^2 - \lambda c^2)\Delta t + (2\theta-1)K^2\Delta t^2 > 0\\ &(2\theta-1)\Delta t^2 K^2 - (2K+b^2+\lambda c^2)\Delta t > 0.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Del parámetro de establilidad l, notemos

$$\begin{aligned} l &= 2a + b^2 + \lambda c(2 + c) \\ &= 2a + b^2 + 2\lambda c + \lambda c^2 \\ &= 2a + 2\lambda c + b^2 + \lambda c^2 \\ &= 2(a + \lambda c) + b^2 + \lambda c^2 \\ &= 2K + b^2 + \lambda c^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo l en Ecuación 5.11 se tiene

$$(2\theta - 1)\Delta t^2 K^2 - l\Delta t > 0$$

Dado que $\Delta t > 0$, es posible factorizar un término de la forma

$$\Delta t[(2\theta - 1)\Delta t K^2 - l] > 0,$$

más aún

$$(2\theta - 1)\Delta t K^2 - l > 0.$$

Despejando de tal forma que podamos expresar la desigualdad anterior en términos de $-l$ tenemos

$$-l > -(2\theta - 1)(a + \lambda c)^2 \Delta t = (1 - 2\theta)(a + \lambda c)^2 \Delta t \tag{5.13}$$

Cuando $\theta = \dfrac{1}{2}$, esto implica $1 - 2\theta = 0$, así

$$0 = (1 - 2\theta)(a + \lambda c)^2 \Delta t < -l$$

Por hipotesis $l < 0$, de aqui $0 < -l$. Por lo tanto, el método es estable cuando $\theta = \dfrac{1}{2}$.

Luego, cuando $\dfrac{1}{2} < \theta \leq 1$, esto implica que $1-2\theta < 0$. Para este caso $(1-2\theta)(a+\lambda c)^2\Delta t < 0$, de igual forma $-l > 0$, entonces

$$(1 - 2\theta)(a + \lambda c)^2 \Delta t < 0 < -l,$$

en consecuencia, el método sigue siendo estable bajo las condiciones de la solución análitica.

Por último, para el caso $0 \leq \theta < \dfrac{1}{2}$, esto implica, $(1-2\theta)(a+\lambda c)^2 > 0$, por lo que la Ecuación 5.13 se cumple si y solo si

$$\Delta t < \frac{-l}{(1-2\theta)(a+\lambda c)^2}.$$

$\square$

6 Referencias